

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

**УТВЕРЖДЕНО**  
решением Ученого совета факультета математики,  
информационных и авиационных технологий  
от « 17 » мая 2022 г. протокол № 4/22  
Председатель Волков М.А.  
*(подпись, расшифровка подписи)*  
« 17 » мая 2022 г.

### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина	Функциональный анализ
Факультет	Математики, информационных и авиационных технологий
Кафедра	Информационных технологий
Курс	3

Направление (специальность): 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль/специализация): Технология программирования

Форма обучения: очная

Дата введения в учебный процесс УлГУ: 1 сентября 2022 г.


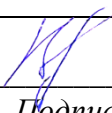
Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_ от \_\_\_ 20\_\_ г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_ от \_\_\_ 20\_\_ г.

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол № \_\_\_ от \_\_\_ 20\_\_ г.

Сведения о разработчиках:

ФИО	Кафедра	Должность, ученая степень, звание
Богданов Андрей Юрьевич	Прикладной математики	Доцент, к.ф.-м.н., доцент

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой прикладной математики, реализующей дисциплину	Заведующий выпускающей кафедрой информационных технологий
 / <u>Бутов А.А.</u> / Подпись / ФИО 14 мая 2022 г.	 / <u>Волков М.А.</u> / Подпись / ФИО 14 мая 2022 г.

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

**Цели освоения дисциплины:** Данная дисциплина знакомит студентов с важнейшими методами функционального анализа, как классическими, так и численными. Достижение этих целей обеспечивает выпускнику получение высшего профессионально профилированного образования и обладание перечисленными ниже общими и предметно-специализированными компетенциями. Дисциплина "Функциональный анализ" непосредственно связана с дисциплинами "Алгебра и геометрия", "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения".

**Задачи освоения дисциплины:** Предметом изучения являются общая теория бесконечномерных метрических пространств, линейных нормированных пространств, гильбертовых пространств, функционалов и операторов на них; теория меры и интегрирования в общих пространствах с мерой, установление обобщающих связей между различными разделами математики, такими как классический анализ, дифференциальные уравнения, линейная алгебра и т.д. В процессе обучения студенты должны усвоить методику дисциплины и приобрести навыки исследования и решения задач функционального анализа.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП:

Дисциплина «Функциональный анализ» (Б1.О.33) относится к дисциплинам Базовой части Блока 1 (обязательная часть) «Дисциплины (модули)» Основной Профессиональной Образовательной Программы по направлению подготовки – 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем.

Для изучения этой дисциплины необходимы знания основных методов линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений. Дисциплина является интегральной и формирует обобщающие фундаментальные математические знания, необходимые для изучения основных прикладных курсов, посвященных аналитическому математическому и имитационному компьютерному моделированию реальных объектов, а также других дисциплин базовой и вариативной частей профессионального цикла этой ОПОП и для прохождения государственной итоговой аттестации.

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Процесс изучения дисциплины в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем направлен на формирование следующих компетенций:

Код и наименование реализуемой компетенции	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций
--	--

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

ОПК-1 Способность применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	<p><b>Знать:</b> основные теоретические положения функционального анализа, методы решения и исследования важнейших типовых задач, важнейшие итерационные алгоритмы.</p> <p><b>Уметь:</b> правильно проводить математическую формализацию задач, выбирать адекватные математические модели, математически корректно применять методы функционального анализа, выполнять интерпретацию математических результатов для реальных систем.</p> <p><b>Владеть:</b> знаниями основных понятий, утверждений, а также методами функционального анализа, как теоретическими, так и численными.</p>
ОПК-2 Способность применять современный математический аппарат, связанный с проектированием, разработкой, реализацией и оценкой качества программных продуктов и программных комплексов в различных областях человеческой деятельности.	<p><b>Знать:</b> основные теоретические положения функционального анализа, методы решения и исследования важнейших типовых задач, важнейшие итерационные алгоритмы.</p> <p><b>Уметь:</b> правильно проводить математическую формализацию задач, выбирать адекватные математические модели, математически корректно применять методы функционального анализа, выполнять интерпретацию математических результатов для реальных систем.</p> <p><b>Владеть:</b> знаниями основных понятий, утверждений, а также методами функционального анализа, как теоретическими, так и численными.</p>

#### 4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего): 3 зачетные единицы.

4.2. Объем дисциплины по видам учебной работы (в часах):

Вид учебной работы	Количество часов (форма обучения очная)	
	Всего по плану	В т.ч. по семестрам
		5 семестр
1	2	3
Контактная работа обучающихся с преподавателем в соответствии с УП	54	54
Аудиторные занятия:	54	54
Лекции	18	18
Семинары и практические занятия	36	36
Лабораторные работы, практикумы	-	-
Самостоятельная работа	54	54
Контроль	-	-
Форма текущего контроля знаний и контроля самостоятельной работы:	устный опрос, тестирование, проверка решения задач	устный опрос, тестирование, проверка решения задач
Курсовая работа	-	-
Виды промежуточной/итоговой	зачет	зачет


Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

аттестации (экзамен, зачет)		
Всего часов по дисциплине	108	108


### 4.3. Содержание дисциплины (модуля). Распределение часов по темам и видам учебной работы:

Форма обучения: очная.


Название разделов и тем	Всего	Виды учебных занятий					Форма текущего контроля знаний
		Аудиторные занятия			Занятия в интерактивной форме	Самостоятельная работа	
		Лекции	Практические занятия, семинары	Лабораторные работы, практикумы			
1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Раздел 1. Метрические пространства</b>							
Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства. Полные метрические пространства, примеры. Неполнота пространства $C[0,1]$ , $p \geq 1$ . Лемма о вложенных шарах. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью. Теорема Арцела. Критерий компактности в $l_p$ , $p \geq 1$ . Принцип сжимающих отображений. Примеры.	24	4	8	-	-	12	Устный опрос, проверка решения задач, тестирование
<b>Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега</b>							
Полукольцо прямоугольников в $R^2$ и $\sigma$ -аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств. Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: $A$ измеримо по Жордану $\Rightarrow A$ измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации. Теорема о $\sigma$ -алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и	24	4	8	-	-	12	Устный опрос, проверка решения задач

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

<p>полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.</p> <p>Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример.</p> <p>Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства). Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд с единичными интервалами. Теоремы Б. Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Теорема о полноте пространства <math>L_1[0,1]</math>. Теорема о сепарабельности пространства <math>L_1[0,1]</math> (плотность в нем непрерывных функций).</p>							
<b>Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы</b>							
<p>Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные непрерывные функции, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности. Сопряженное пространство,</p>	18	3	6	-	-	9	Устный опрос, проверка решения задач

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к $l_p$ , $p \geq 1$ . Теорема Хана-Банаха. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе. Достаточность одного из условий $Ker A=0$ или $Im=L$ для обратимости оператора $A \in L(L)$ в конечномерном пространстве $L$ . Примеры необходимых операторов, для которых выполнено одно из условий $Ker A=0$ или $Im=L$ .							
<b>Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства</b>							
Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС в сепарабельном гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.	18	3	6	-	-	9	Устный опрос, проверка решения задач
<b>Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы</b>							
Спектр оператора в	18	3	6	-	-	9	Устный

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

<p>банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Необратимость компактного оператора. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре самосопряженного оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта.</p>							опрос, проверка решения задач, контрольная работа
<b>Раздел 6. Обобщенные функции</b>							
<p>Пространство основных функций, его нетривиальность, сходимость в нем. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры. Бесконечная дифференцируемость обобщенных функций. Сходимость обобщенных функций, <math>\delta</math>-образные последовательности. Примеры рядов, сходящихся в смысле обобщенных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций.</p>	12	2	4	-	-	6	Устный опрос, проверка решения задач.
Зачет							
Итого 5 семестр	108	18	36	-	-	54	-

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

Всего	10 8	18	36	-	-	54	-
-------	---------	----	----	---	---	----	---

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### Раздел 1. Метрические пространства

Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства. Полные метрические пространства, примеры. Неполнота пространства  $CL_p[0,1]$ ,  $p \geq 1$ . Лемма о вложенных шарах. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью. Теорема Арцела. Критерий компактности в  $l_p$ ,  $p \geq 1$ . Принцип сжимающих отображений. Примеры.

### Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега

Полукольцо прямоугольников в  $R^2$  и  $\sigma$ -аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств. Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации:  $A$  измеримо по Жордану  $\Rightarrow A$  измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации. Теорема о  $\sigma$ -алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.

Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства). Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд с единичными интервалами. Теоремы Б. Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Теорема о полноте пространства  $L_1[0,1]$ . Теорема о сепарабельности пространства  $L_1[0,1]$  (плотность в нем непрерывных функций).

### Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы

Линейные нормированные и банаховы пространств. Линейные непрерывные функции, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к  $l_p$ ,  $p \geq 1$ . Теорема Хана-Банаха. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе. Достаточность одного из условий  $Ker A=0$  или  $Im=L$  для обратимости оператора  $A \in L(L)$  в конечномерном пространстве  $L$ . Примеры необходимых операторов, для которых выполнено одно из условий  $Ker A=0$  или  $Im=L$ .

### Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства

Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС в сепарабельном



Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимости элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.

Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы. Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Необратимость компактного оператора. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре самосопряженного оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта.

#### Раздел 6. Обобщенные функции

Пространство основных функций, его нетривиальность, сходимости в нем. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры. Бесконечная дифференцируемость обобщенных функций. Сходимость обобщенных функций,  $\delta$ -образные последовательности. Примеры рядов, сходящихся в смысле обобщенных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций.

### 6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

- 1) Примеры метрических пространств.
- 2) Корректность метрик.
- 3) Сепарабельность метрических пространств.
- 4) Полнота метрических пространств.
- 5) Предкомпактность и компактность в метрических пространствах.
- 6) Принцип сжимающих отображений.
- 7) Мера Лебега.
- 8) Интеграл Лебега.
- 9) Линейные непрерывные функционалы.
- 10) Норма линейных непрерывных функционалов.
- 11) Линейные непрерывные операторы.
- 12) Норма линейного непрерывного оператора.
- 13) Контрольная работа.
- 14) Решение простейших интегральных уравнений.
- 15) Задачи на спектр и резольвенту линейных непрерывных операторов.
- 16) Задачи на собственные значения и собственные функции.
- 17) Обобщенные функции. Основные свойства.
- 18) Применение обобщенных функций к решению линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

### 7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ПРАКТИКУМЫ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

## 8. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ

Выполнение курсовых работ и рефератов не предусмотрено учебным планом.

### Примерная тематика контрольных работ по дисциплине:

#### Вариант 1

Задача 1. Определяет ли данная функция расстояние в  $\mathbb{R}^2$ ?  $\rho(x, y) = \arctg(x - y)^2$ .

Задача 2. Является ли пространство  $C[0,1]$  полным с данной метрикой?

$$\rho(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} \left( \frac{1}{1+x^2} |f(x) - g(x)| \right).$$

Задача 3. Пусть  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|z\| = \max(|x|, |y|)$ . Подпространство

$L_0 = \{(x, y) : y + 3x = 0\}$ ,  $f_0(x, y) = x + y$ . Продолжить функционал  $f_0$  на  $\mathbb{R}^2$  с сохранением нормы.

Задача 4. Найти нормы функционала в  $C[0,1]$  и  $L_1[0,1]$ .  $F(f) = 3 \int_0^{1/2} f(t) dt - 2 \int_{1/2}^1 f(t) dt$ .

Задача 5. Найти норму оператора  $A : \ell_2 \rightarrow \ell_2$ ,  $A\{x_n\} = \left\{ \left( \frac{n+3}{n+5} \right)^n x_n \right\}$ .

#### Вариант 2

Задача 1. Определяет ли данная функция расстояние в  $\mathbb{R}^2$ ?  $\rho(x, y) = \arcsin \left( \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \right)$ .

Задача 2. Является ли пространство  $C[0,1]$  полным с данной метрикой?

$$\rho(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} (x \cos x |f(x) - g(x)|).$$

Задача 3. Пусть  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|z\| = |x| + |y|$ . Подпространство  $L_0 = \{(x, y) : y + 2x = 0\}$ ,

$f_0(x, y) = 3y$ . Продолжить функционал  $f_0$  на  $\mathbb{R}^2$  с сохранением нормы.

Задача 4. Найти нормы функционала в  $C[0,1]$  и  $L_1[0,1]$ .  $F(f) = 2 \int_0^{1/3} f(t) dt - 6 \int_{2/3}^1 f(t) dt$ .

Задача 5. Найти норму оператора  $A : C[1,4] \rightarrow C[1,4]$ ,  $Af(x) = \left( x^2 + \frac{16}{x} - 16 \right) f(x)$ .

## 9. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства.
2. Полные метрические пространства, примеры. Полнота пространства  $CL_p[0,1]$ ,  $p \geq 1$ . Лемма о вложенных шарах.
3. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа.
4. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью.
5. Теорема Арцела.
6. Критерий предкомпактности в  $l_p$ ,  $p \geq 1$ .

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

7. Принцип сжимающих отображений. Разрешимость уравнения
- $$f(x) + \int_0^x K(x,t)f(t)dt = g(x).$$
8. Полукольцо прямоугольников в  $R^2$  и  $\sigma$ - аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств (без доказательства). Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации:  $A$  измеримо по Жордану  $\Rightarrow A$  измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации.
9. Теорема о  $\sigma$ - алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке.
10. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.
11. Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры.
12. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду.
13. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример.
14. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства).
15. Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд
- $$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\mu(f^{-1}[k, k+1]).$$
16. Теоремы Б.Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Условие интегрируемости функции  $f(x) = x^{-\alpha}$  на  $[0,1], \alpha \in R$ .
17. Теорема о полноте пространства  $L_1[0,1]$ .
18. Теорема о сепарабельности пространства  $L_1[0,1]$  (плотность в нем непрерывных функций)
19. Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные непрерывные функционалы, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности.
20. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к  $l_p, p \geq 1$ .
21. Теорема Хана-Банаха.
22. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве.
23. Теорема Банаха-Штейнгауза.
24. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Достаточность одного из условий  $KerA = 0$  или  $Im A = L$  для обратимости оператора  $A \in L(L)$  в конечномерном пространстве  $L$ . Примеры необходимых операторов  $A \in L(L)$ , для которых выполнено одно из условий  $KerA \neq 0$  или  $Im A \neq L$ .
25. Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры.
26. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС с сепарабельном гильбертовом пространстве.

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

27. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
28. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфность бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.
29. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимости элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.
30. Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора.
31. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора.
32. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.
33. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному.
34. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре компактного самосопряженного оператора.
35. Теорема Гильберта.
36. Пространство основных и обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции, действия над ними. Фундаментальное решение дифференциального оператора и решение неоднородного ДУ.

## 10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩИХСЯ

Форма обучения: очная.


Название разделов и тем	Вид самостоятельной работы (проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная работа, подготовка к сдаче зачета, зачета и др.)	Объем в часах	Форма контроля (проверка решения задач, реферата и др.)
Раздел 1. Метрические пространства			
Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и не сепарабельного пространства.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Полные метрические пространства, примеры. Полнота пространства $C_p[0,1]$ , $p \geq 1$ . Лемма о вложенных шарах.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос, проверка решения задач
Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Арцела.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Критерий предкомпактности в $l_p$ , $p \geq 1$ .	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

Принцип сжимающих отображений. Разрешимость линейного интегрального уравнения Вольтерра с нелинейным ядром.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос, проверка решения задач
Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега			
Полукольцо прямоугольников в $R^2$ и $\sigma$ -аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств (без доказательства). Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: $A$ измеримо по Жордану $\Rightarrow A$ измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Теорема о $\sigma$ -алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	
Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\mu(f^{-1}[k, k+1])$ .	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Теоремы Б.Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Условие интегрируемости функции $f(x) = x^{-\alpha}$ на $[0, 1], \alpha \in R$ .	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$ .	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций).	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы			
Линейные нормированные и банаховы	Проработка учебного	2	устный опрос

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

пространства. Линейные непрерывные функционалы, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности.	материала, подготовка к сдаче зачета		
Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о сопряженном к $l_p, p \geq 1$ .	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Хана-Банаха.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Теорема Банаха-Штейнгауза.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Достаточность одного из условий $KerA = 0$ или $Im A = L$ для обратимости оператора $A \in L(L)$ в конечномерном пространстве $L$ . Примеры необходимых операторов $A \in L(L)$ , для которых выполнено одно из условий $KerA \neq 0$ или $Im A \neq L$ .	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос, проверка решения задач
Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства			
Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС с сепарабельном гильбертовом пространстве.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос
Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфность бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы			
Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

оператора.			
Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	1	устный опрос, проверка решения задач
Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре компактного самосопряженного оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос
Теорема Гильберта.		1	устный опрос
Раздел 6. Обобщённые функции			
Пространство основных и обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции, действия над ними.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос, проверка решения задач
Фундаментальное решение дифференциального оператора и решение неоднородного ДУ.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче зачета	2	устный опрос, проверка решения задач

## 11. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### а) Список рекомендуемой литературы

#### основная


1. Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / Колмогоров Андрей Николаевич, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989.
2. Богданов, А. Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А. Ю. Богданов. - Ульяновск : УлГУ, 2003. URL <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf>
3. Треногин В.А., Функциональный анализ : Учебник. / Треногин В.А. - 3-е изд., испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с. - ISBN 5-9221-0272-9 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102729.html>

#### дополнительная

1. Лебедев В.И., Функциональный анализ и вычислительная математика : Учеб. пособие. / Лебедев В.И. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 296 с. - ISBN 5-9221-0092-0 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100920.html>
2. Люстерник, Лазарь Аронович. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие для вузов / Люстерник Лазарь Аронович, В. И. Соболев. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009
3. Ревина С.В., Функциональный анализ в примерах и задачах : учебное пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2009. - 120 с. - ISBN 978-5-9275-0683-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785927506835.html>
4. Осиленкер, Б. П. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие / Б. П. Осиленкер. — Москва : Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 132 с. — ISBN 978-5-7264-1186-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/60819.html>

#### учебно-методическая

1. Богданов, Андрей Юрьевич. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 1 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2012. URL <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/231/bogdanov3.pdf>

Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

2. Богданов, Андрей Юрьевич. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 2 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМиИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2015. URL [http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/242/bogdanov-2\\_2015.pdf](http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/242/bogdanov-2_2015.pdf)
3. Богданов, Андрей Юрьевич. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб.-метод. пособие / Богданов Андрей Юрьевич. - Ульяновск : УлГУ, 2008. URL <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf>
4. Богданов, А.Ю. Методические указания для самостоятельной работы студентов бакалавриата факультета математики, информационных и авиационных технологий направления 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», профиль «Технология программирования» по дисциплине «Функциональный анализ» / А. Ю. Богданов; УлГУ, ФМИиАТ. - Ульяновск : УлГУ, 2019. - Загл. с экрана; Неопубликованный ресурс. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 506 КБ). - Текст : электронный. <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/7407>

Согласовано:  
**ДИРЕКТОР НБ** / **БУРХАНОВА М.М.** /  /   
 Должность сотрудника научной библиотеки / ФИО / подпись / дата

**б) Программное обеспечение:** стандартные средства ОС.

**в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы**

**1. Электронно-библиотечные системы:**

1.1. Цифровой образовательный ресурс IPRsmart : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа». - Саратов, [2022]. – URL: <http://www.iprbookshop.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.2. Образовательная платформа ЮРАЙТ : образовательный ресурс, электронная библиотека : сайт / ООО Электронное издательство ЮРАЙТ. – Москва, [2022]. - URL: <https://urait.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.3. База данных «Электронная библиотека технического ВУЗа (ЭБС «Консультант студента») : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Политехресурс. – Москва, [2022]. – URL: <https://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.4. Консультант врача. Электронная медицинская библиотека : база данных : сайт / ООО Высшая школа организации и управления здравоохранением-Комплексный медицинский консалтинг. – Москва, [2022]. – URL: <https://www.rosmedlib.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.5. Большая медицинская библиотека : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Букап. – Томск, [2022]. – URL: <https://www.books-up.ru/ru/library/>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.6. ЭБС Лань : электронно-библиотечная система : сайт / ООО ЭБС Лань. – Санкт-Петербург, [2022]. – URL: <https://e.lanbook.com>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.7. ЭБС Znanium.com : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Знаниум. - Москва, [2022]. - URL: <http://znanium.com> . – Режим доступа : для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.8. Clinical Collection : научно-информационная база данных EBSCO // EBSCOhost : [портал]. – URL: <http://web.b.ebscohost.com/ehost/search/advanced?vid=1&sid=9f57a3e1-1191-414b-8763-e97828f9f7e1%40sessionmgr102> . – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.



Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

1.9. База данных «Русский как иностранный» : электронно-образовательный ресурс для иностранных студентов : сайт / ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа». – Саратов, [2022]. – URL: <https://ros-edu.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. **КонсультантПлюс** [Электронный ресурс]: справочная правовая система. /ООО «Консультант Плюс» - Электрон. дан. - Москва : КонсультантПлюс, [2022].

### 3. Базы данных периодических изданий:

3.1. База данных периодических изданий EastView : электронные журналы / ООО ИВИС. - Москва, [2022]. – URL: <https://dlib.eastview.com/browse/udb/12>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

3.2. eLIBRARY.RU: научная электронная библиотека : сайт / ООО Научная Электронная Библиотека. – Москва, [2022]. – URL: <http://elibrary.ru>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный

3.3. Электронная библиотека «Издательского дома «Гребенников» (Grebinnikon) : электронная библиотека / ООО ИД Гребенников. – Москва, [2022]. – URL: <https://id2.action-media.ru/Personal/Products>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

4. **Федеральная государственная информационная система «Национальная электронная библиотека»** : электронная библиотека : сайт / ФГБУ РГБ. – Москва, [2022]. – URL: <https://нэб.рф>. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

5. **SMART Imagebase : научно-информационная база данных EBSCO** // EBSCOhost : [портал]. – URL: <https://ebSCO.smartimagebase.com/?TOKEN=EBSCO-1a2ff8c55aa76d8229047223a7d6dc9c&custid=s6895741>. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Изображение : электронные.

### 6. Федеральные информационно-образовательные порталы:

6.1. **Единое окно доступа к образовательным ресурсам** : федеральный портал . – URL: <http://window.edu.ru/> . – Текст : электронный.

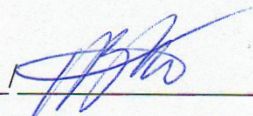
6.2. **Российское образование** : федеральный портал / учредитель ФГАУ «ФИЦТО». – URL: <http://www.edu.ru>. – Текст : электронный.

### 7. Образовательные ресурсы УлГУ:

7.1. Электронная библиотечная система УлГУ : модуль «Электронная библиотека» АБИС Мега-ПРО / ООО «Дата Экспресс». – URL: <http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Web>. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

Согласовано:

Заместитель начальника УИТиТ /Клочкова А.В. \_\_\_\_\_



## 12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ:

Аудитории для проведения лекций, семинарских занятий, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации, групповых и индивидуальных консультаций.

## 13. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться одни из следующих вариантов восприятия информации с учетом их индивидуальных

Форма


Министерство науки и высшего образования РФ Ульяновский государственный университет	Форма	
Ф-Рабочая программа дисциплины		

психофизических особенностей:

– для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

Разработчик   
подпись

доцент  
должность

Богданов А.Ю.  
ФИО